モンテカルロ計算のオプション価格評価への応用

広島経済大学
高石　哲弥

- メトロポリス法、ハイブリッドモンテカルロ法等は与えられた確率分布に従う配位（経路）を生成することができる。
- 実際に上記のモンテカルロ法によって経路を生成する
- 生成した経路を利用して（経路依存型）オプションの価格を評価する

オプション

- あることが選択できる権利 (一般)
- ある資産を一定の価格で購入または売却できる権利 (ファイナンス)
- 権利は購入する必要がある
- 権利は行使してもしなくても良い

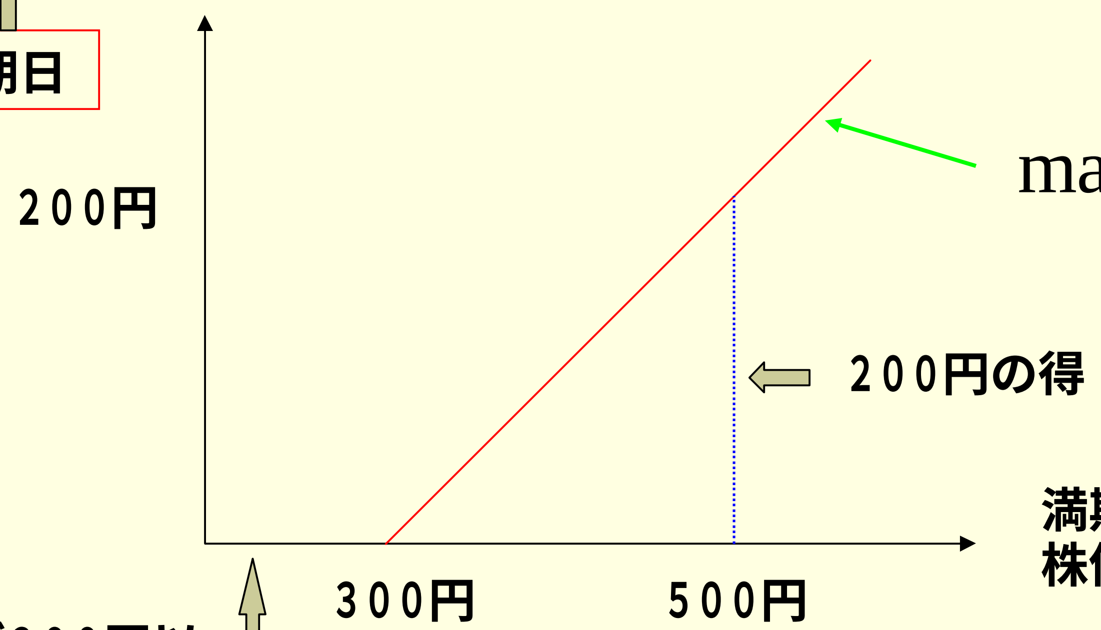
オプションの例

行使価格　K

1年後に1株300円で1000株購入できる権利

満期日

コール･オプション



$$\max(S-K,0)$$

満期日の
株価　S

株価が300円以下の場合は買う必要なし。

この権利の価格は？

オプションの例

- ヨーロピアンオプション

  権利行使日（満期日）にあらかじめ決められた価格（行使価格K）で資産Sを購入（売却）する権利

満期日の価格Sのみ依存

- アメリカンオプション

  満期日の任意の時点であらかじめ決められた価格（行使価格）で資産Sを購入（売却）する権利

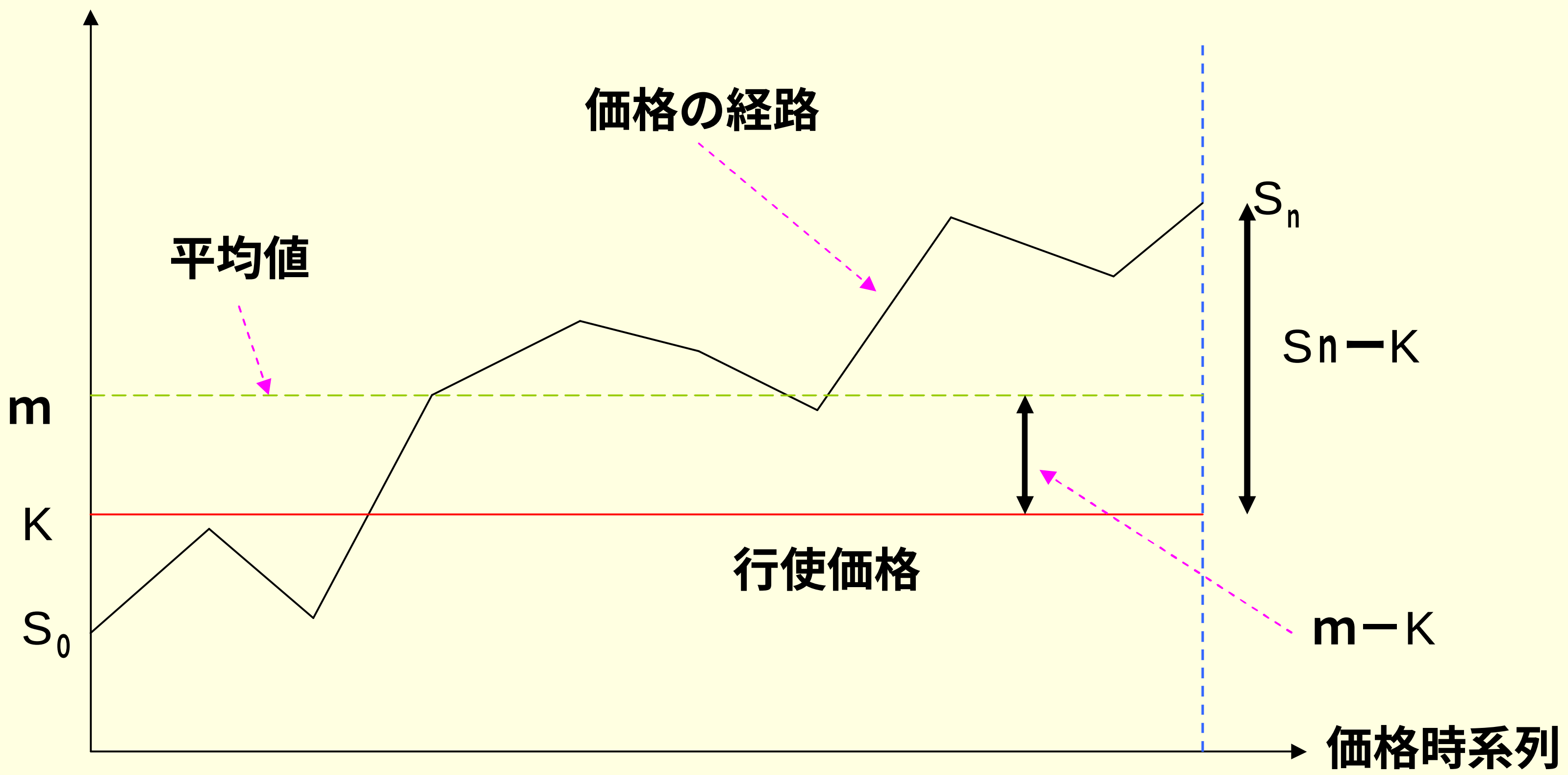
- アジアンオプション

満期日にいたる価格Sの経路

  経路依存型オプションの1つ

  満期日までの資産Sの価格時系列の平均値をmとすると、

  Max(m-K,0)またはMax(K-m,0)受け取れる権利


価格の経路
平均値
m
K
S0
Sn
Sn－K
行使価格
m－K
価格時系列

オプションの価格

$p(q|S_0)$ 株価がS_0からqにゆく確率

$$\langle O \rangle e^{-rt} = \frac{1}{Z}\int dq O(q) p(q|S_0) e^{-rt}$$

r：利子率

平均したらどれだけ得するか

満期日に株価がqの場合、どれだけ得するか（ペイオフ）

株価が（幾何）ブラウン運動をすると仮定すると

ヨーロピアンオプションの場合、解析解が得られている

満期日の株価のみに依存

→ ブラック・ショールズ式

株価の変動

株価Sは以下の方程式に従って変動すると仮定する (幾何ブラウン運動)

$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

$$d(\ln S) = Adt + \sigma dW \qquad A = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$= Adt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt}$$

$z = \ln S$ とおく

<u>dt後にzからz'に行く確率 (遷移確率)</u>

$$p(z' \mid z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z' - (z + Adt))^2}{2\sigma^2 dt} \right)$$

Chapman-Kolmogorov equation

nスライスに分割

$$p(z' \mid z_0) = \int dz_1 \cdots dz_n \, p(z' \mid z_n) p(z_{n-1} \mid z_{n-2}) \cdots p(z_1 \mid z_0)$$

$$p(z_{n+1} \mid z_0) = \int dz_1 \cdots dz_n \frac{1}{\sqrt{(2\pi dt\sigma^2)^{n+1}}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(z_k - (z_{k-1} + Adt))^2}{2\sigma^2 dt} \right)$$

$$\uparrow$$

$$p(z_{n+1}, \cdots, z_0)$$

•満期日の株価だけによる場合

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int dz_{n+1} O(z_{n+1}) p(z_{n+1} \mid z_0)$$

•株価の経路による場合

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int dz_{n+1} \cdots dz_1 O(z_{n+1}, \cdots, z_0) p(z_{n+1}, \cdots, z_0)$$

$$p(z_{n+1}, \cdots, z_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi dt \sigma^2)^{n+1}}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(z_k - (z_{k-1} + Adt))^2}{2\sigma^2 dt} \right)$$

この確率でPath をモンテカルロ法によって作る

$$z^k = (z_{n+1}, \cdots, z_0)^k$$

$$\langle O \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} O(z^k)$$

M個のpathからの平均

メトロポリス法

ローカルアップデート

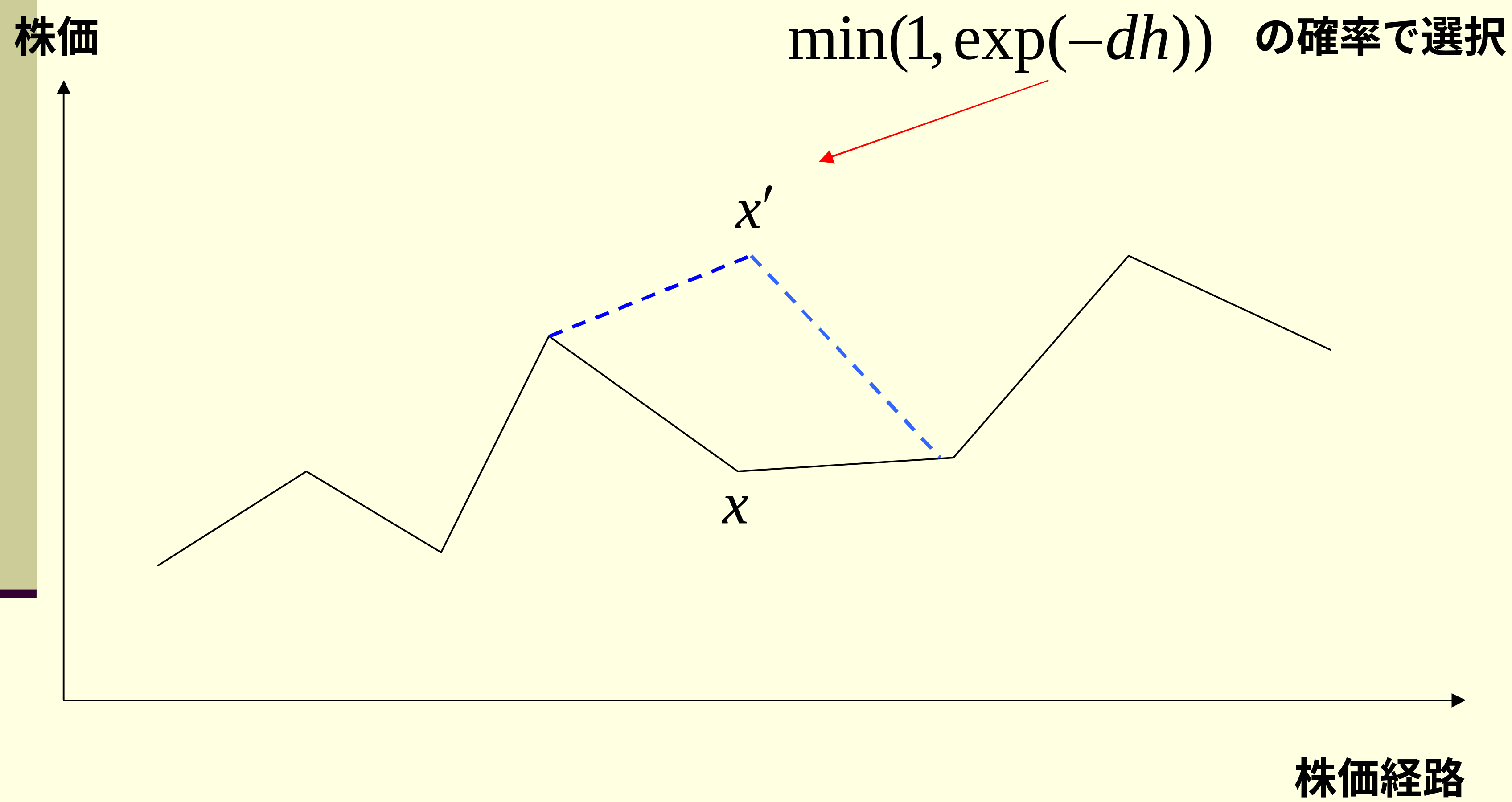
$p(x) \propto \exp(-f(x))$ に従う確率変数xを作りたい

1. 新しい変数の候補を選ぶ　　$x' = x + d\sigma(\varepsilon - 0.5)$

   [0,1]の一様乱数

2. $dh = f(x') - f(x)$ を計算する

3. $\min(1, \exp(-dh))$ で候補を新しい変数とする。
   それ以外は以前の変数を保持する



株価
$\min(1, \exp(-dh))$ の確率で選択
x'
x
株価経路

$$p(z_{n+1},\cdots,z_0)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi dt\sigma^2)^{n+1}}}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(z_k-(z_{k-1}+Adt))^2}{2\sigma^2 dt}\right)$$

$y_k = z_k - kAdt$ と置き換えると

↓

$$p(y_{n+1},\cdots,y_0)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi dt\sigma^2)^{n+1}}}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(y_k-y_{k-1})^2}{2\sigma^2 dt}\right)$$

シミュレーションパラメータ

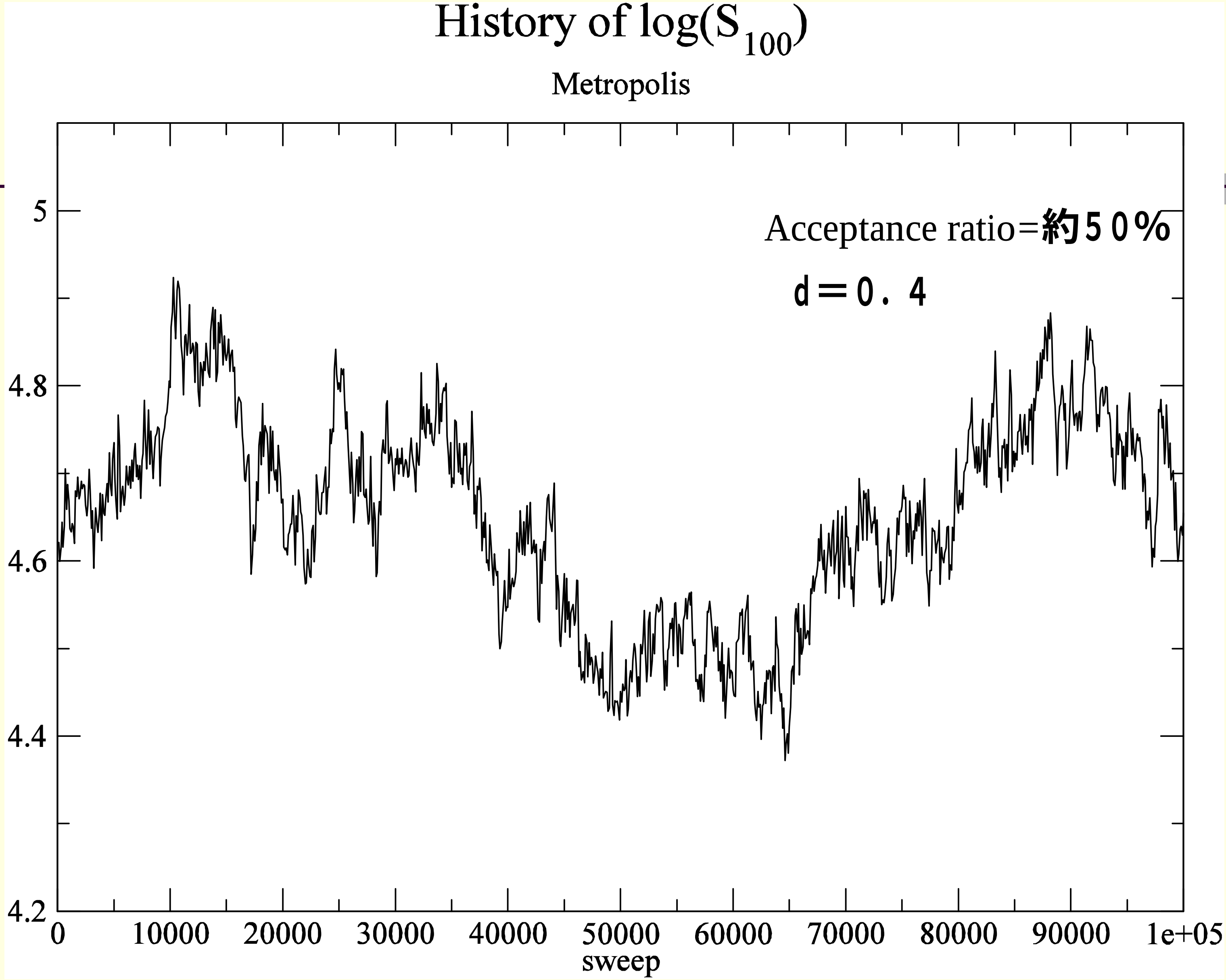
利子率　$r = 0.05$

$\sigma = 0.01$

満期日　$T = 1$ (year)

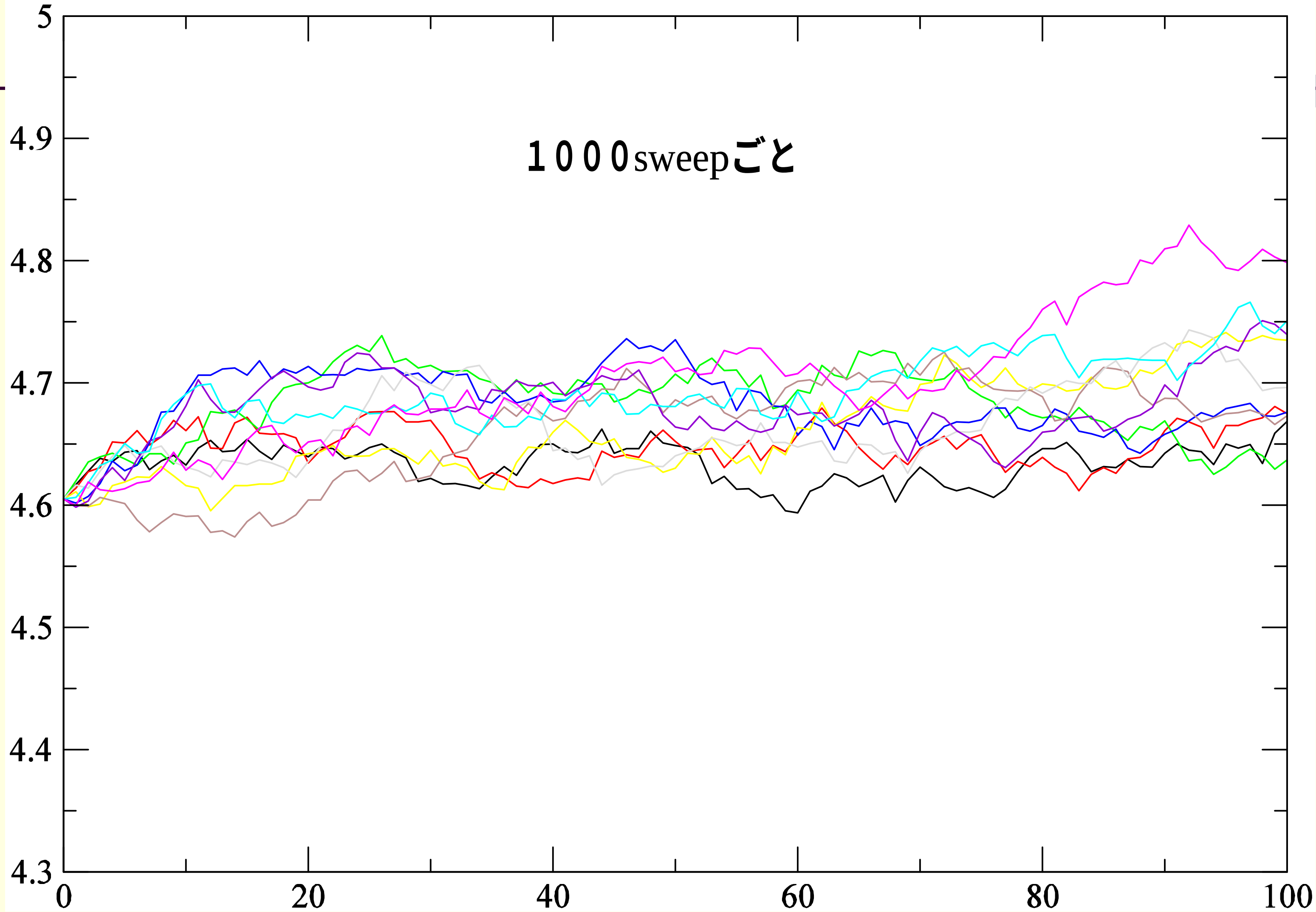
$dt = 1/100$

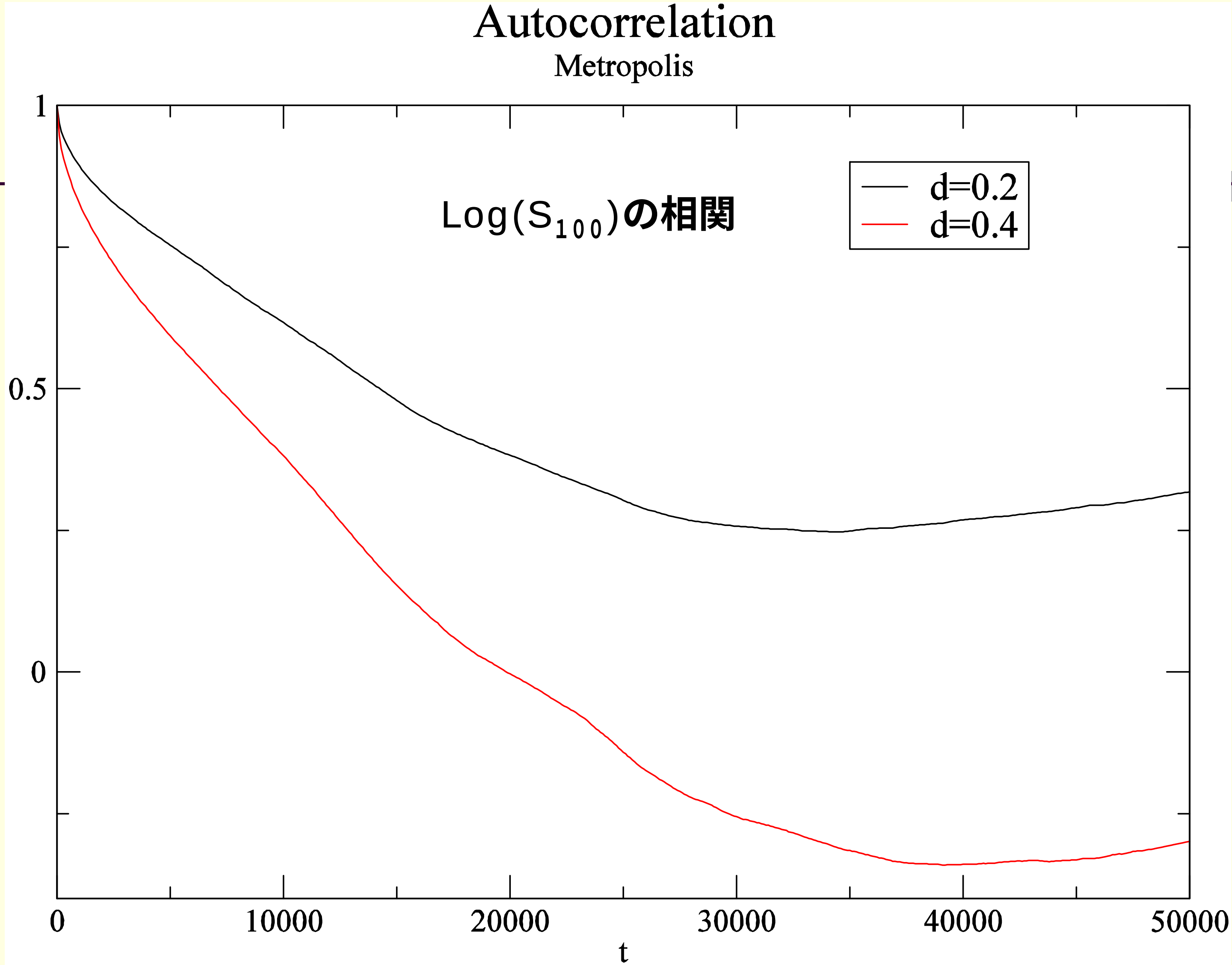
初期株価　$S_0 = 100$



History of log(S_{100})
Metropolis
Acceptance ratio=約５０%
d＝０．４
5
4.8
4.6
4.4
4.2
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
1e+05
sweep

Metropolis path





Autocorrelation
Metropolis
Log(S100)の相関
d=0.2
d=0.4
1
0.5
0
0
10000
20000
30000
40000
50000
t

ハイブリッドモンテカルロ法

グローバルアップデート

グローバルアップデートーー＞　配位を一度に変える

系にグローバルな相互作用がある場合に有効

以下の２つを組み合わせたモンテカルロ法

- 分子動力学シミュレーション
- メトロポリス法

ハミルトニアンの導入

$$Z = \int dx \exp(-f(x))$$ 分配関数

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int dx O(x) \exp(-f(x))$$ O(x)の平均

$$Z' = \int dxdp \exp(-\frac{1}{2}p^2 - f(x))$$ Xに共役な運動量pを導入

$$= \int dxdp \exp(-H)$$ ⟸ この分配関数はO(x)の平均を変えない

ハミルトニアン $$H = \frac{1}{2}p^2 + f(x)$$

ハイブリッドモンテカルロ法のステップ

- ハミルトン方程式を解く　(分子動力学シミュレーション)

$$x, p \to x', p' \qquad H(x, p) \to H(x', p')$$

$$dH = H' - H$$

dHは一般にはゼロでない

- メトロポリスステップ

$\min(\exp(-dH), 1)$ の確率で新しい配位をアクセプトする

ハミルトン方程式を解く

$$\dot{g} = \{g, H\}$$ gは、xまたはp　　$\{,\}$ Poisson bracket

$$L(H)g \equiv \{g, H\}$$

オペレータ

一般には解けない

$$g(t+\Delta t) = \exp(\Delta t L(H)) g(t)$$

$$L(H) = L\left(p^2/2\right) + L(f(x))$$
$$= T + V$$

$$\exp(\Delta t L(H)) = \exp(\Delta t T/2)\exp(\Delta t V)\exp(\Delta t T/2) + \mathrm{O}(\Delta t^3)$$

Leapfrog integrator

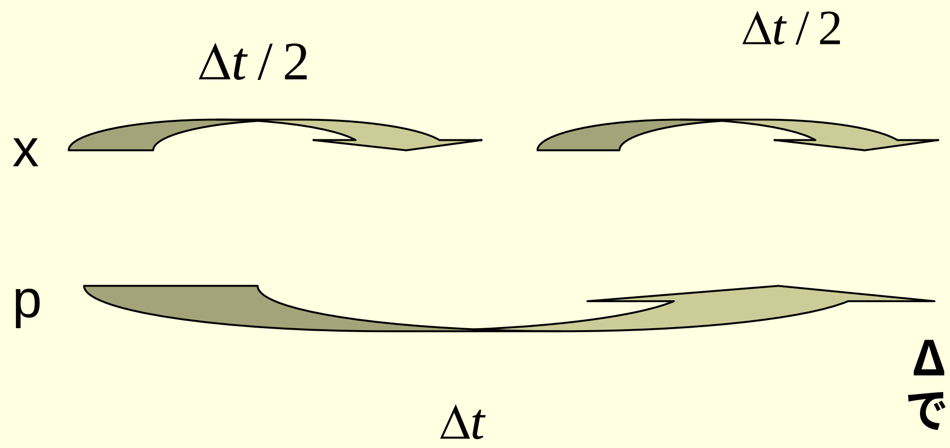
Simplectic integrator

Leapfrog integrator

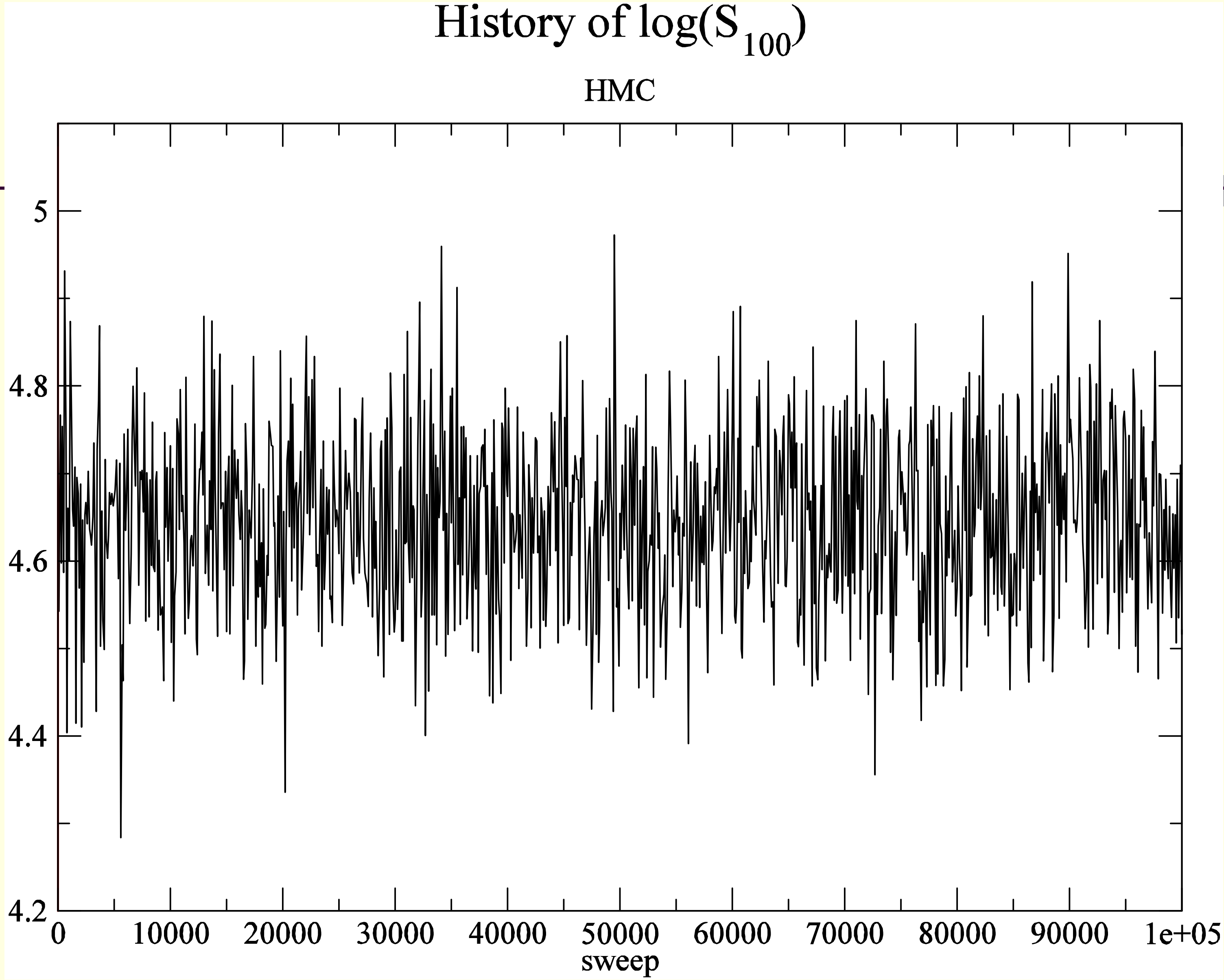
$$1:\quad x(t+\Delta t/2) = x(t) + p(t)\Delta t/2$$

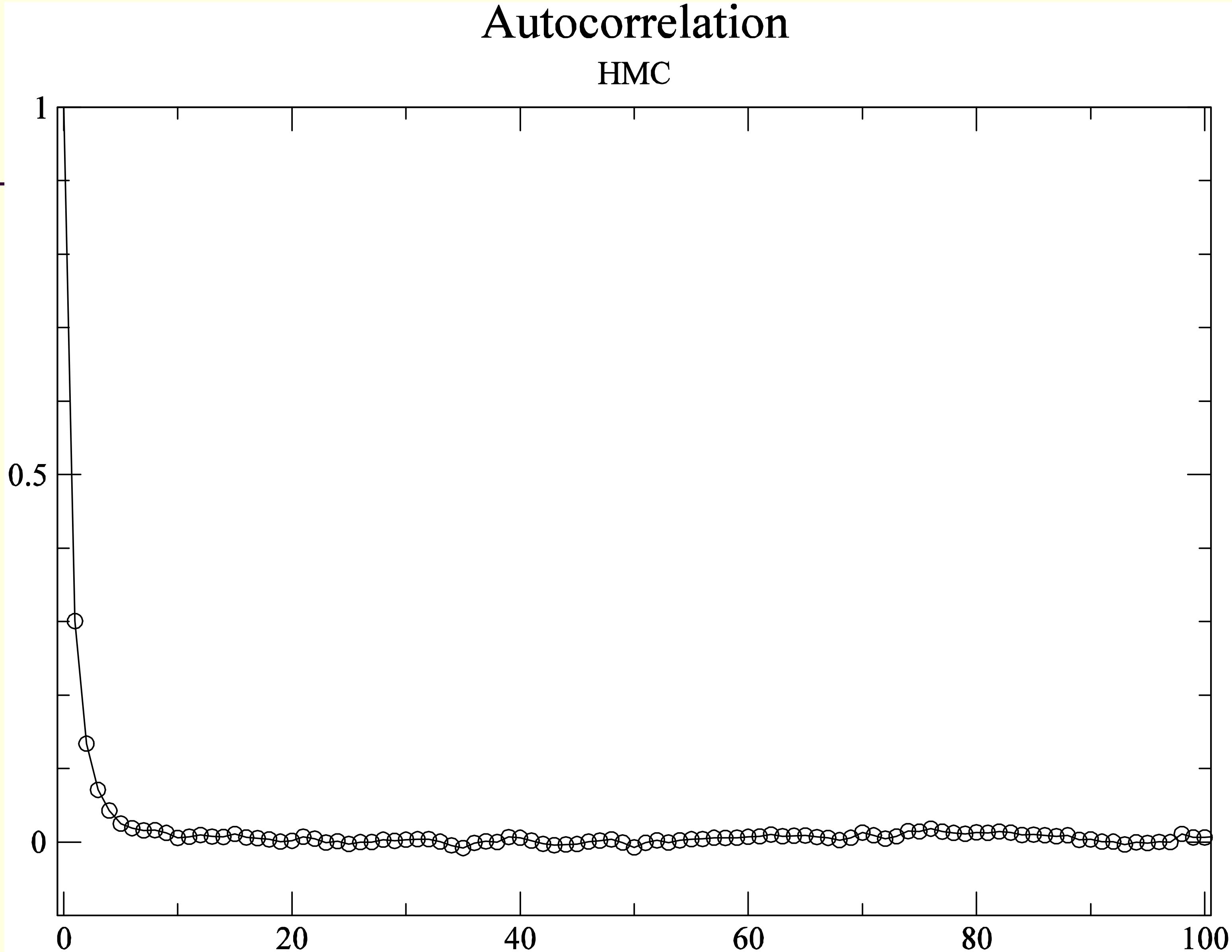
$$2:\quad p(t+\Delta t) = p(t) - \frac{\partial V(t+\Delta t/2)}{\partial x}\Delta t$$ ← **これを繰り返す**

$$3:\quad x(t+\Delta t) = x(t\Delta t/2) + p(t\Delta t)\Delta t/2$$



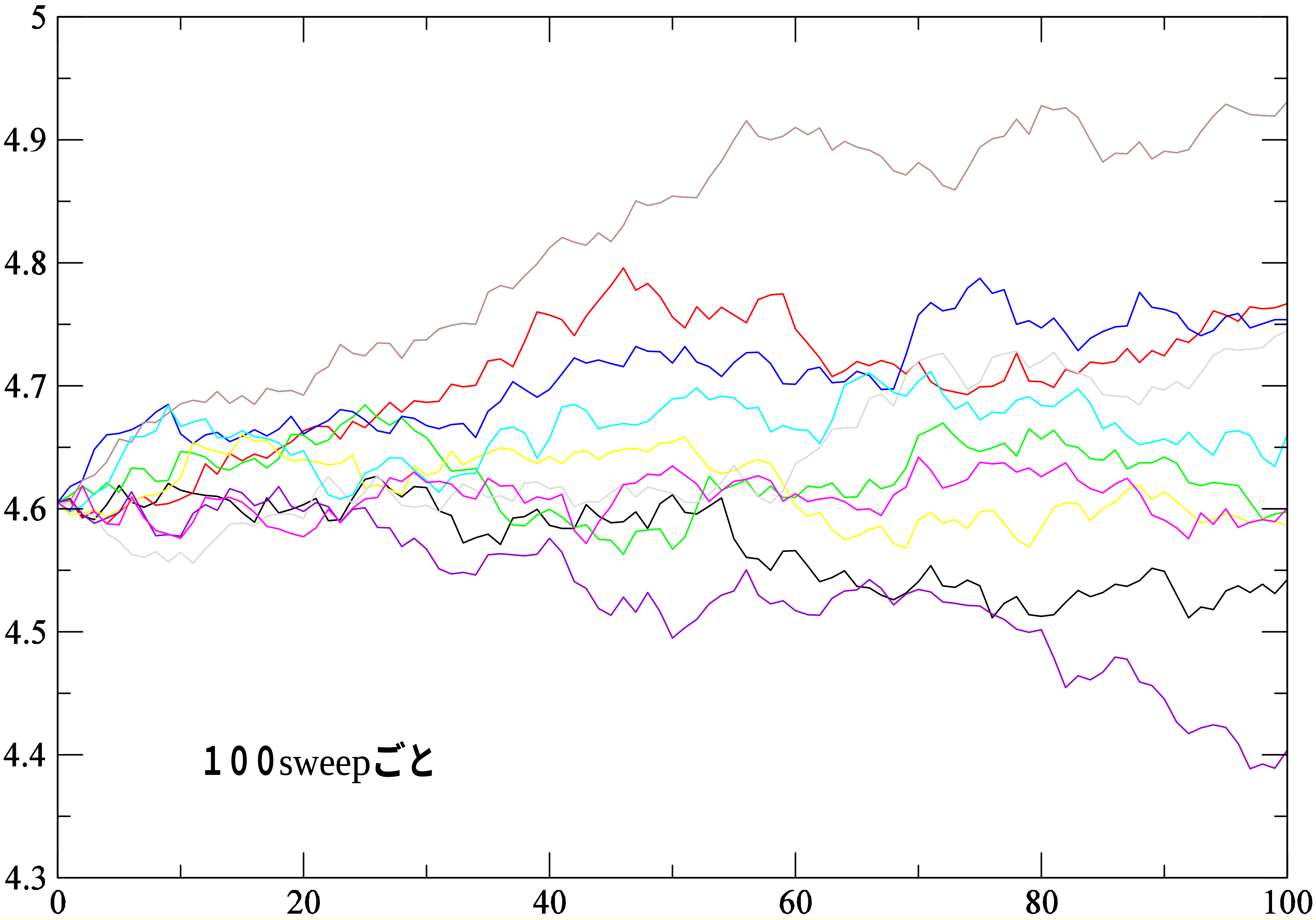
Δｔの大きさはメトロポリステストでのacceptance**を決める。**
Acceptannce　**は**60～70**%程度がちょうど良い**

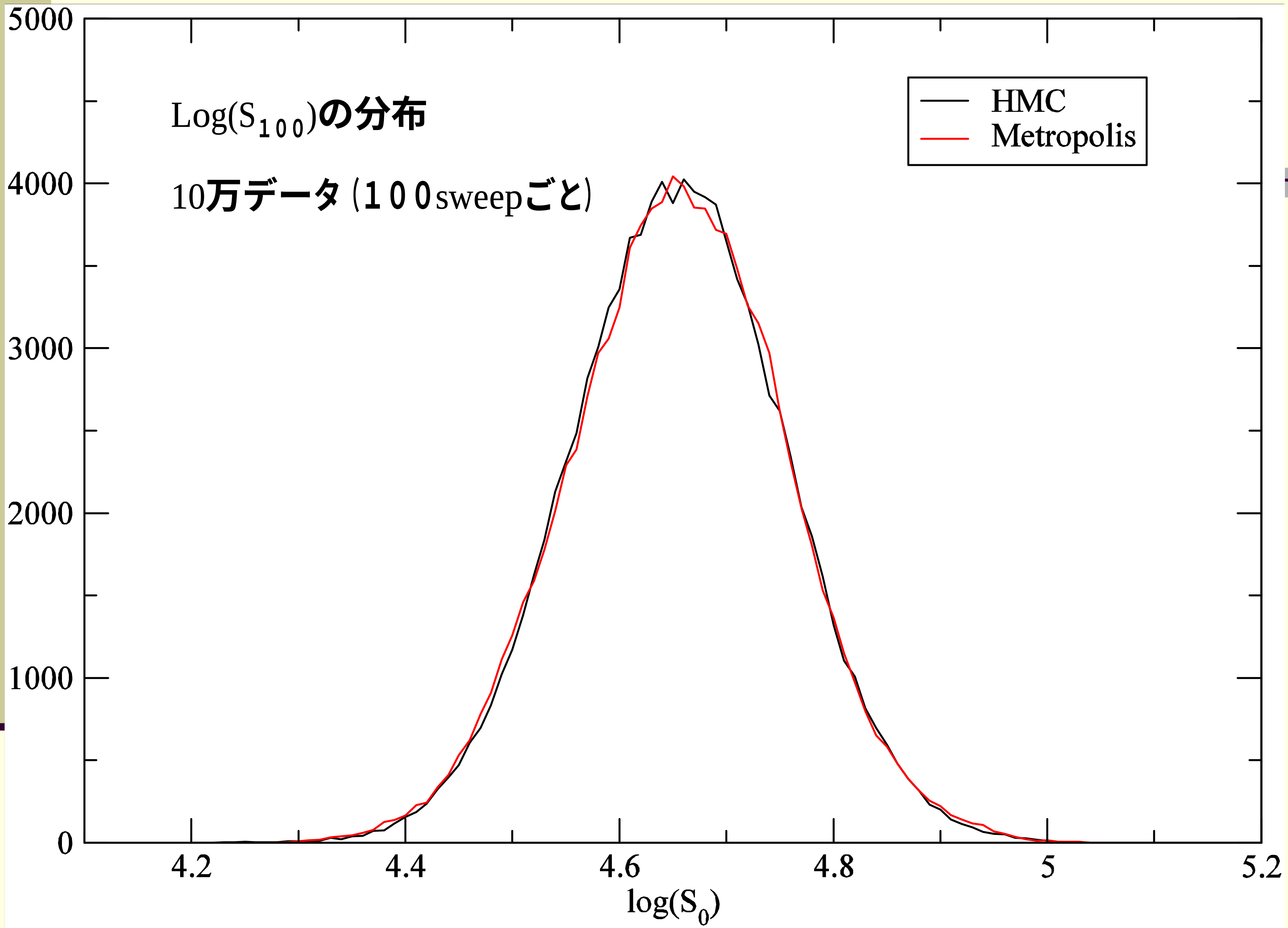

History of log(S_{100})
HMC
5
4.8
4.6
4.4
4.2
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
1e+05
sweep



Autocorrelation
HMC
1
0.5
0
0
20
40
60
80
100

HMC path





Log(S100)の分布
10万データ（100sweepごと）
HMC
Metropolis
5000
4000
3000
2000
1000
0
4.2
4.4
4.6
4.8
5
5.2
log(S0)

アジア型オプションの計算

$$\langle O\rangle e^{-rT} = \frac{1}{Z}\int dz_{n+1}\cdots dz_1 O(z_{n+1},\cdots,z_0)\,p(z_{n+1},\cdots,z_0)e^{-rT}$$

株価の平均による

$$O(z_{n+1},\cdots,z_0) = \max\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\exp(z_k)-K,0\right)$$

$$= \max\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}S_k - K,0\right)$$

パラメータ

利子率 r＝0.095 **満期日** T＝1 (year) dt=0.01

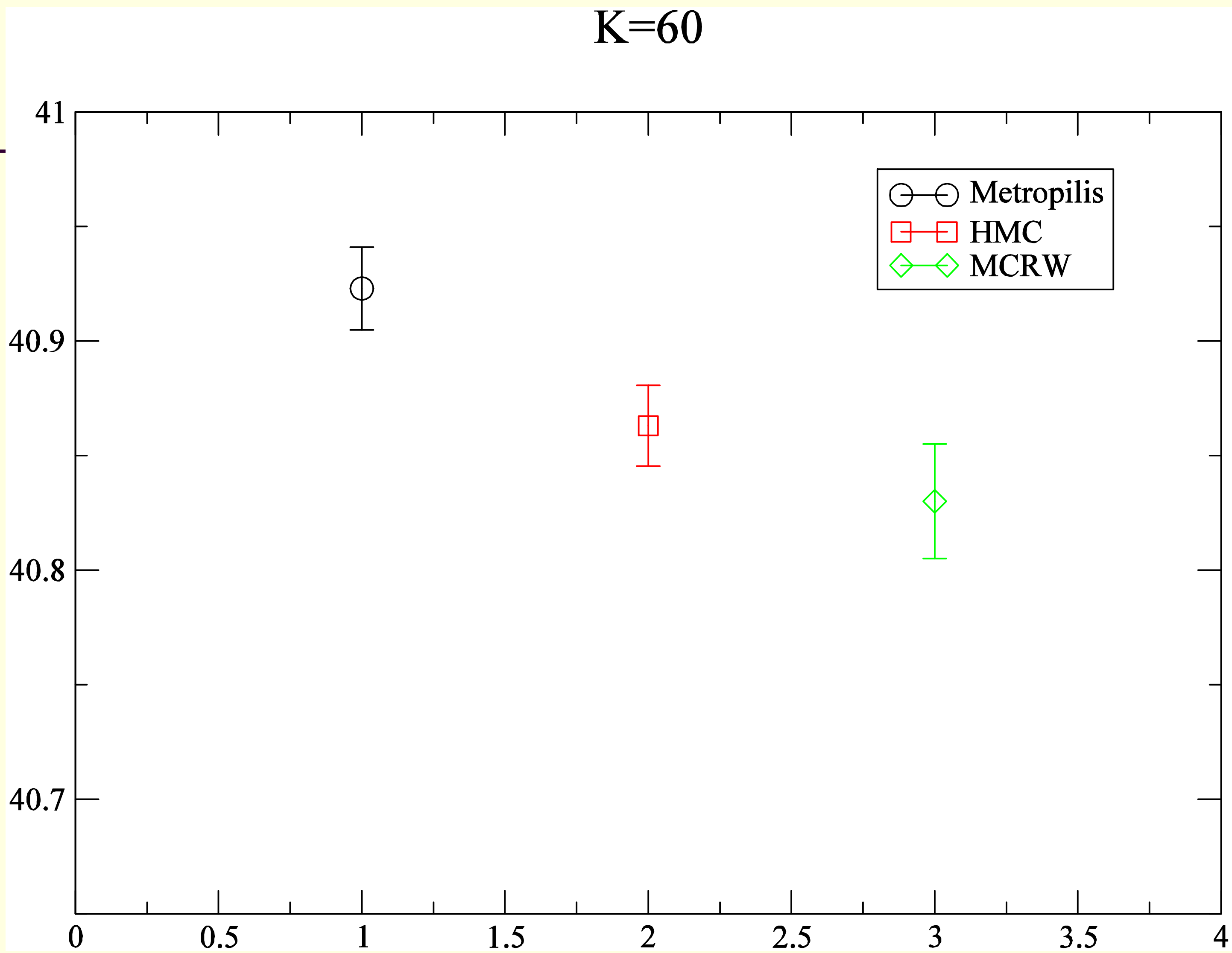
σ ＝0.2 **初期株価** S_0＝１００

行使価格K	K=60	K=100	K=150
Metropolis	40.923(18)	7.147(14)	0.0051(3)
HMC	40.86(2)	6.923(13)	0.0063(4)
MCRW	40.830(25)	6.899(19)	0.0054(5)

Metroplis: 40万（100sweep毎）

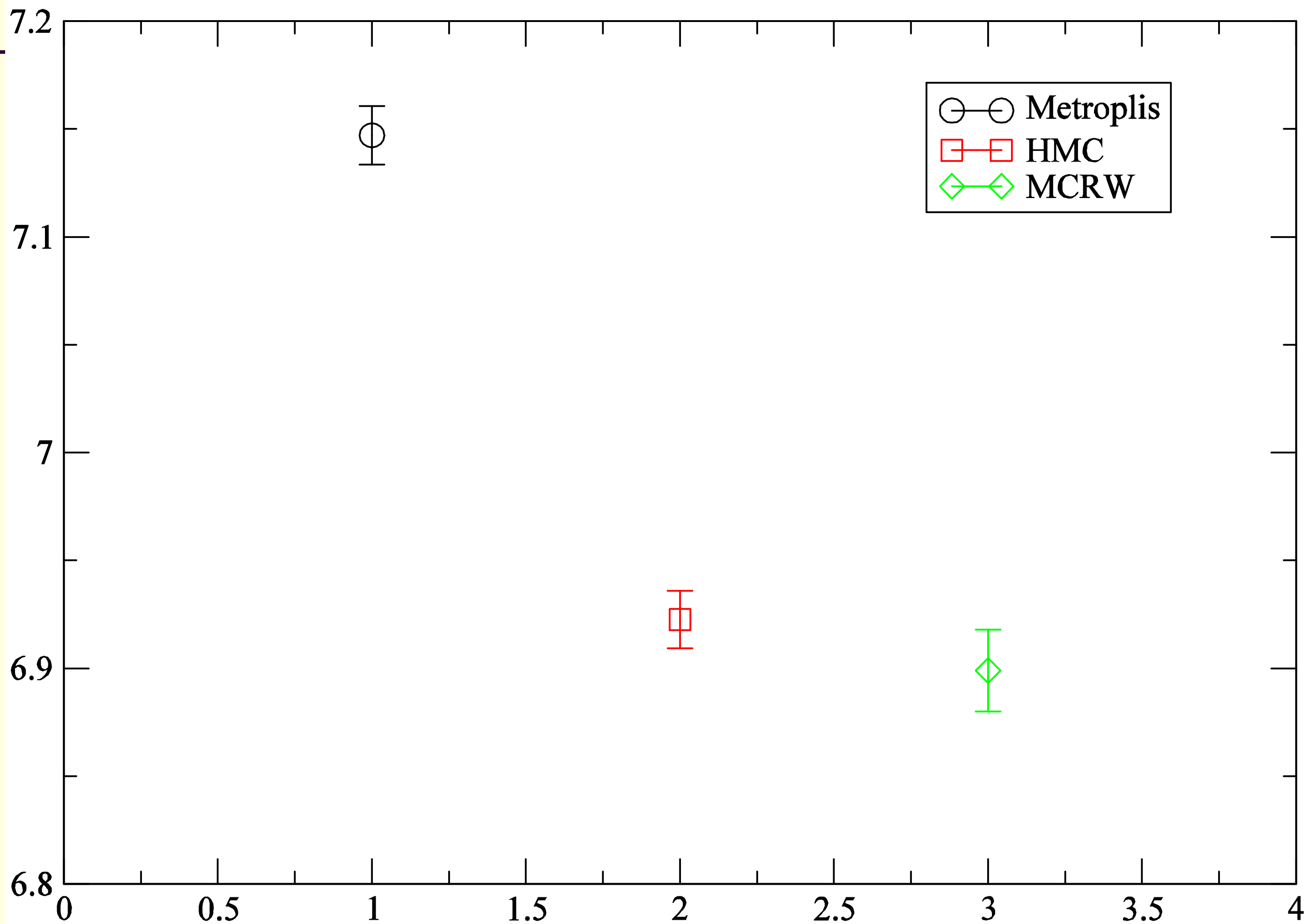
HMC：40万（10sweep毎）

MCRW：20万

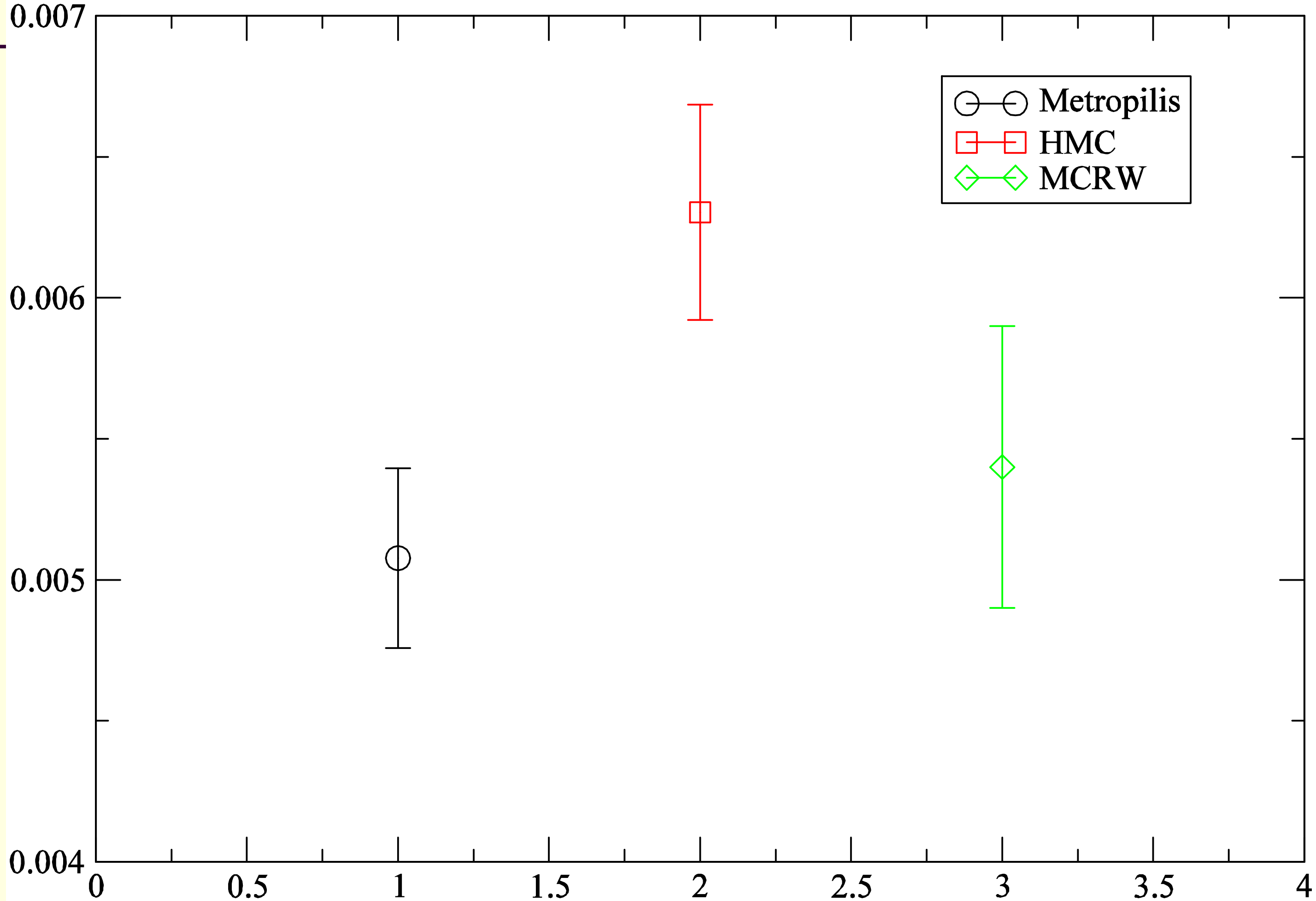


K=60
41
40.9
40.8
40.7
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Metropilis
HMC
MCRW

K=100



K=150



まとめ

- モンテカルロ法 (Metropolis,HMC) による株価経路の生成
- アジア型オプション価格の計算
- ここでのモンテカルロ法は有効か？

Random　walkによる株価経路の生成と比較した場合あまりメリットはあるように見えない

応用できる問題はあるか？