スピンモデルによる金融市場のシミュレーション

広島経済大学
高石　哲弥

1.Introduction

実際の金融市場における価格変動をシミュレーションする(最大限)簡単なモデルは？

パラメータの少ないモデル

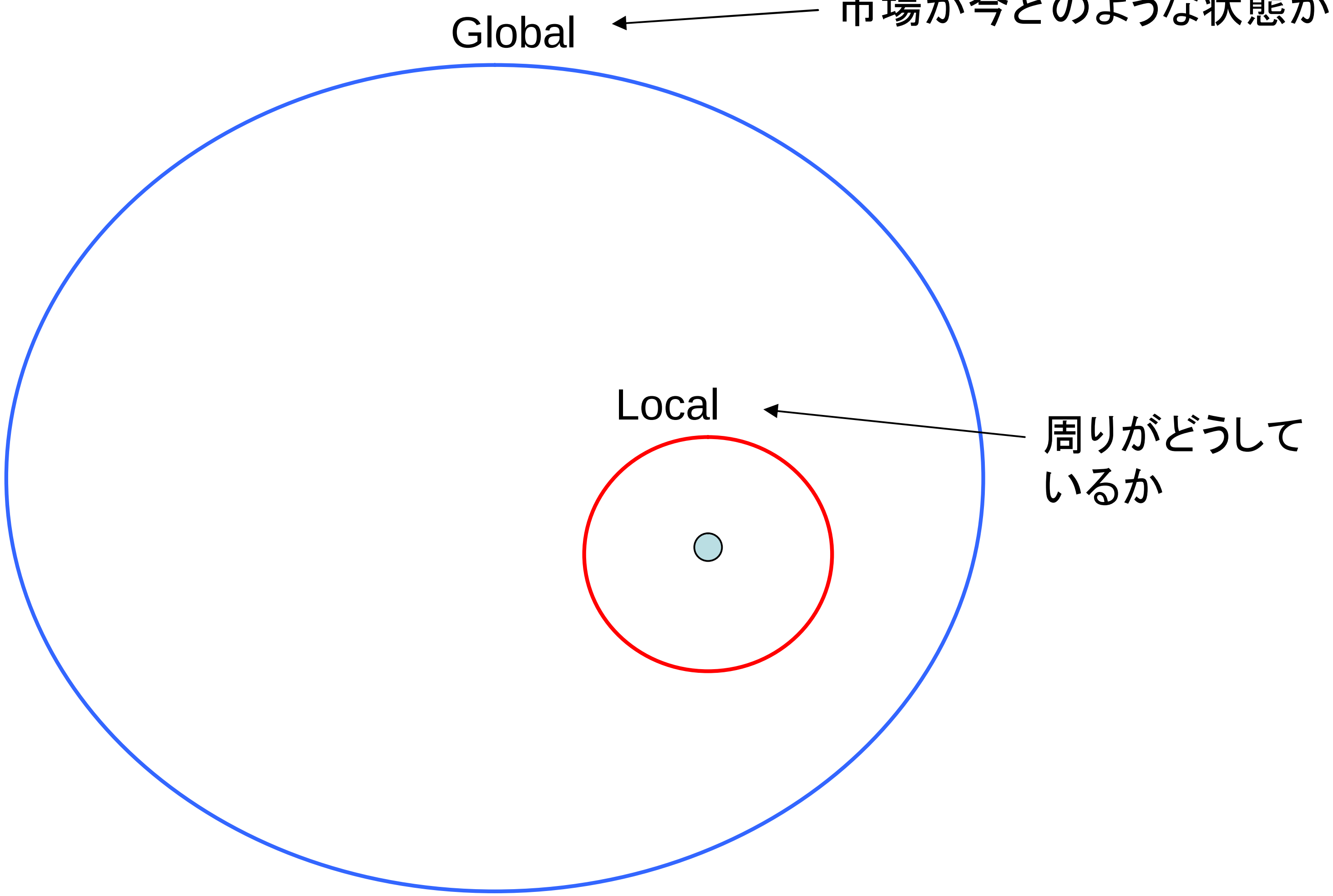
特にbubble とcrash

Bornholdtのスピンモデル

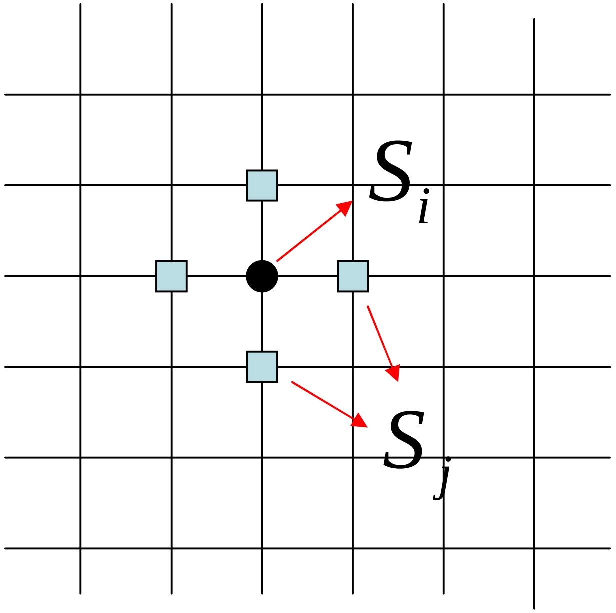
LocalとGlobalな相互作用を持つ

このモデルは実際の市場における価格変動の性質のいくつかをよく表す。

金融市場で受ける2つの力



2.Bornholdt's spin model



S.Bornholdt, Int.J.Mod.Phys.C12(2001) 667

T.Yamano, Int.J.Mod.Phys.C12(2002)

T.Kaizoji, S.Bornholdt, Y.Fujiwara, Physica A 316 (2002) 441

Ising モデルをもとにしたモデル

S_i は+1または-1をとる

例えば、 Buy Sell

磁化 $M(t) = \frac{1}{n}\sum_j S_j(t)$ →Buy数とSell数の差

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij} S_j(t) - \alpha S_i(t)\,|M(t)| \qquad \alpha > 0$$

Local interaction　　Global interaction

以下の確率でupdate

$$S_i(t+1) = +1 \qquad p = 1/(1+\exp(-2\beta h_i(t)))$$

$$S_i(t+1) = -1 \qquad 1-p$$

Local　interaction:　スピンを揃える効果ー周りに影響を受ける

Global　interaction: |M(t)|が大きければスピンをフリップー多数派⇔少数派

リターンの定義

S.Bornholdt $r(t) = \ln|M(t)| - \ln|M(t-1)|$

T.Kaizoji, S.Bornholdt, Y.Fujiwara $r(t) = M(t) - M(t-1)$

Update schemeと時間 tの定義

Hamiltonian? Detailed balance?

Sequential update

アップデイトするスピンの順番を固定

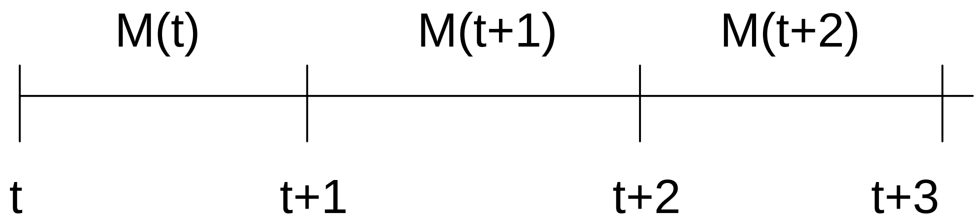
Random update

ランダムに選んだ順番でスピンをアップデイト

Simultaneous update

すべてのスピンを同時にアップデイト

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij} S_j(t) - \alpha S_i(t) \,|\, M(t) \,|$$



3.Simulation

格子サイズ:　LxL　　L=　71, 100, 141

パラメータ:　$\beta = 2$

$\alpha = 5, 10, 15, 20, 30$

$J_{ij}=1$　nearest neighbor のみ

それぞれのパラメータで5,000,000 updatesを行う

測定量:

磁化:　$M(t) = \frac{1}{n}\sum_j S_j(t)$　　Fig.1

リターン:　$r(t) = \left[M(t) - M(t-1)\right]/2$　　Fig.2

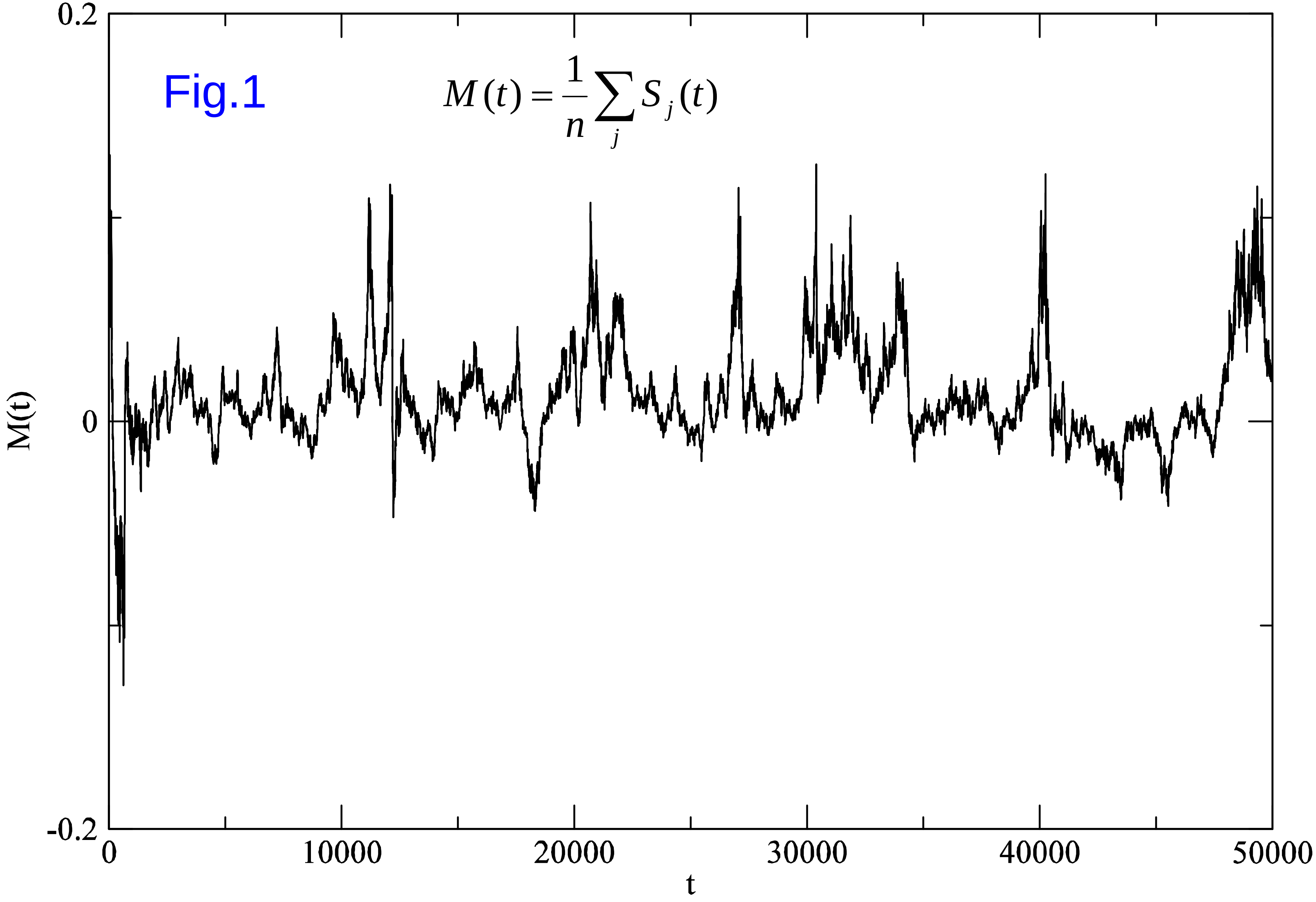


Fig.1
$M(t) = \frac{1}{n}\sum_j S_j(t)$
0.2
0
-0.2
M(t)
0
10000
20000
30000
40000
50000
t

L=100 β=2 α=20

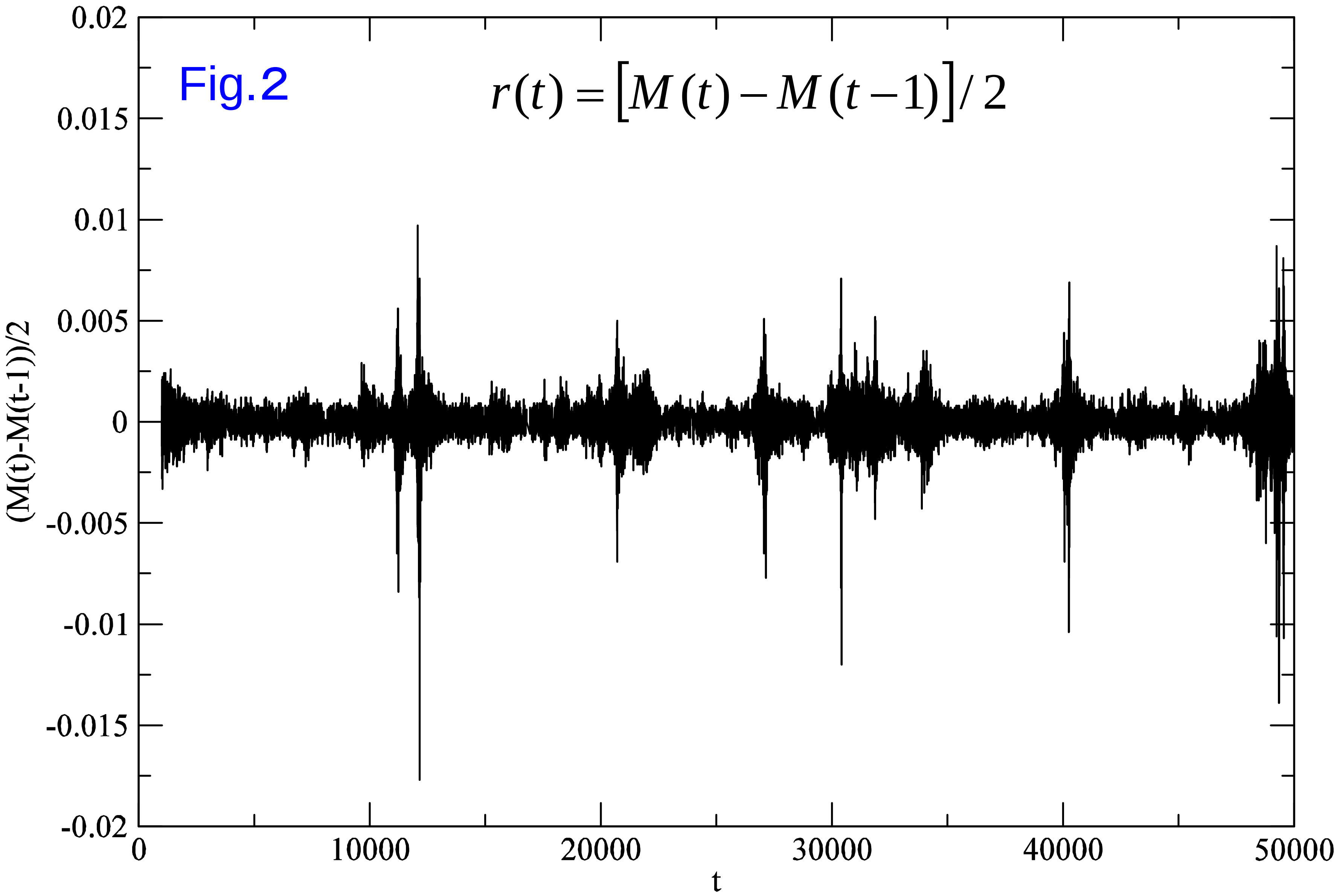


Fig.2
$r(t) = [M(t) - M(t-1)]/2$
(M(t)-M(t-1))/2
t
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
0
10000
20000
30000
40000
50000

リターンのヒストグラム

αを変えたもの→ Fig.3

Fat tail が見られる

αを変えても大きな変化は見られない

格子サイズを変えたも→Fig.4

格子サイズの小さいほうがFat tail が顕著に見られる

q-Gaussian によるフィット

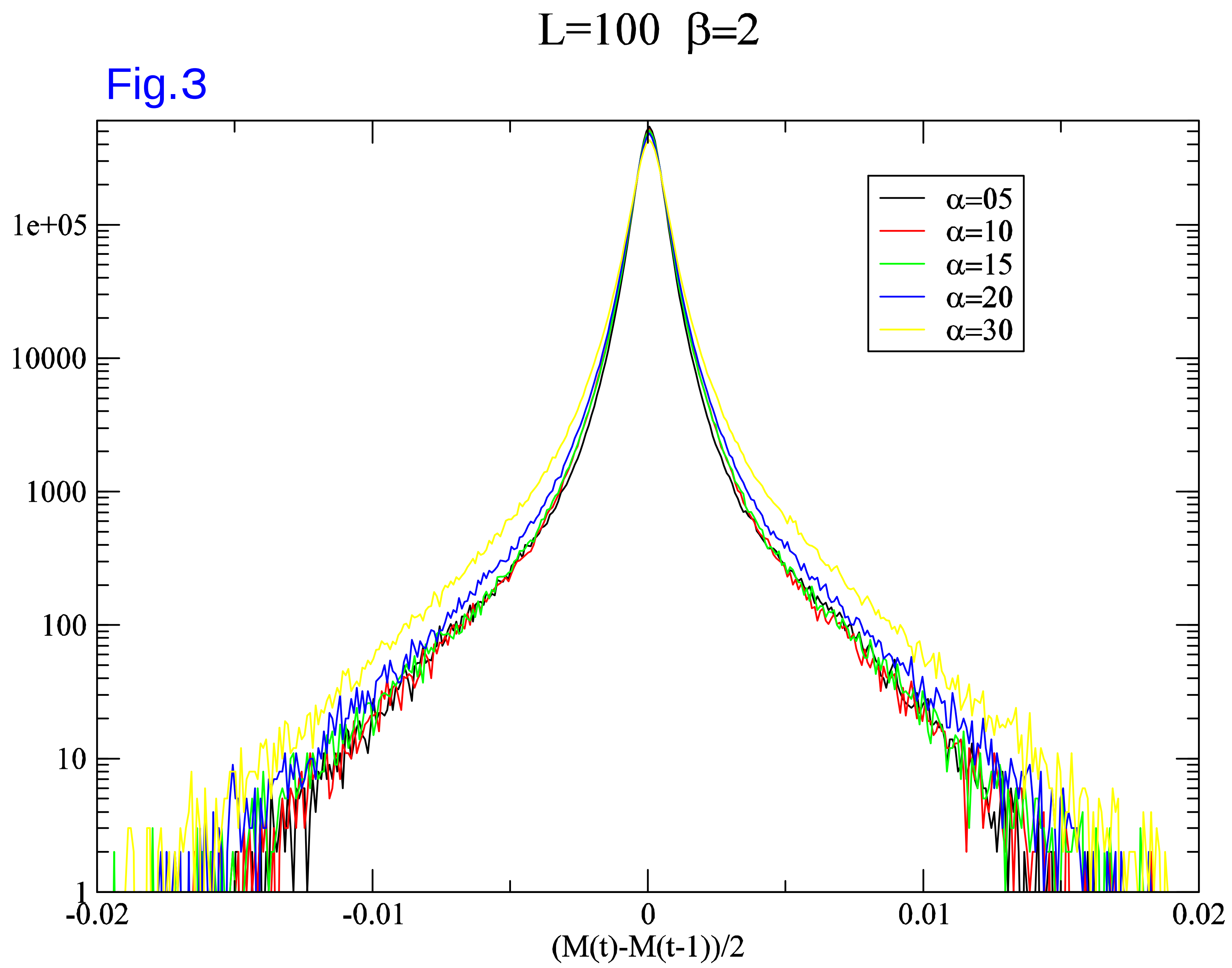
$$e_q^{-ax^2} = 1/[1+(q-1)ax^2]^{1/(q-1)}$$

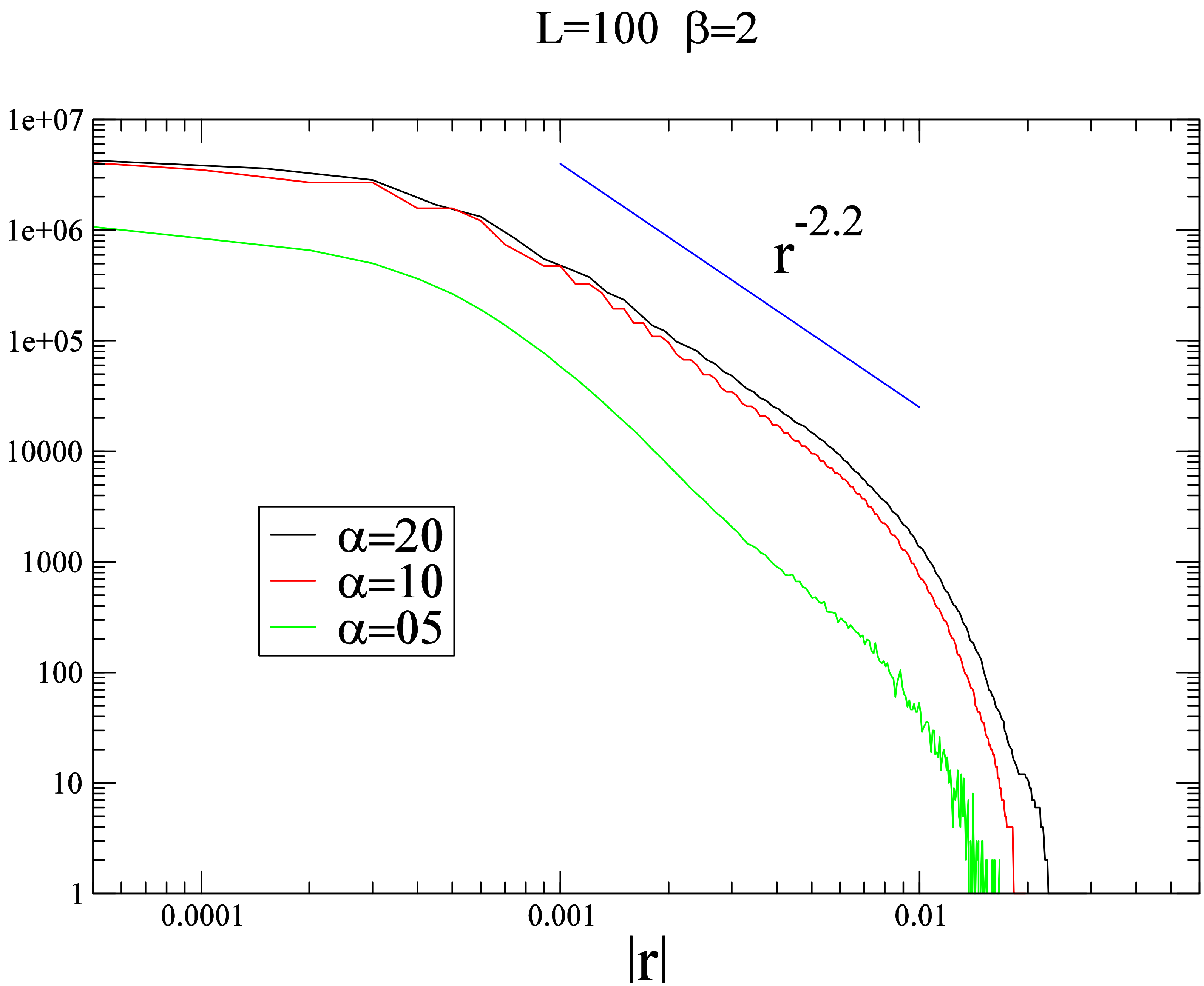
$$\lim_{q\to 1} e_q^{-ax^2} = e^{-ax^2}$$

q=1でGaussian

q=1.5～1.7の結果が得られるがxが大きいところでのフィッティングは悪い Fig.5

Fig.3


L=100 β=2
1e+05
10000
1000
100
10
1
-0.02
-0.01
0
0.01
0.02
(M(t)-M(t-1))/2
α=05
α=10
α=15
α=20
α=30


L=100 β=2
1e+07
1e+06
1e+05
10000
1000
100
10
1
0.0001
0.001
0.01
|r|
$r^{-2.2}$
α=20
α=10
α=05

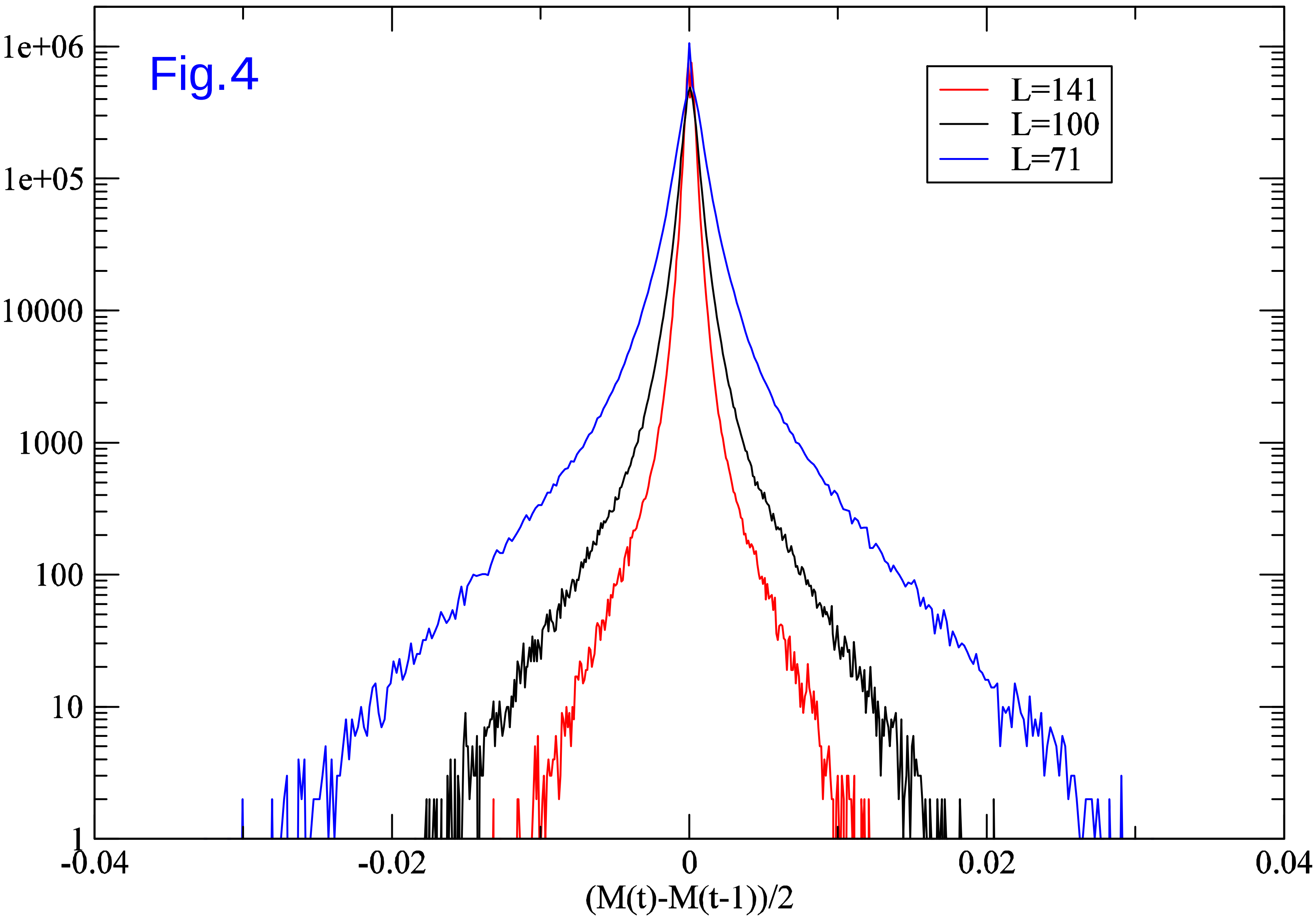
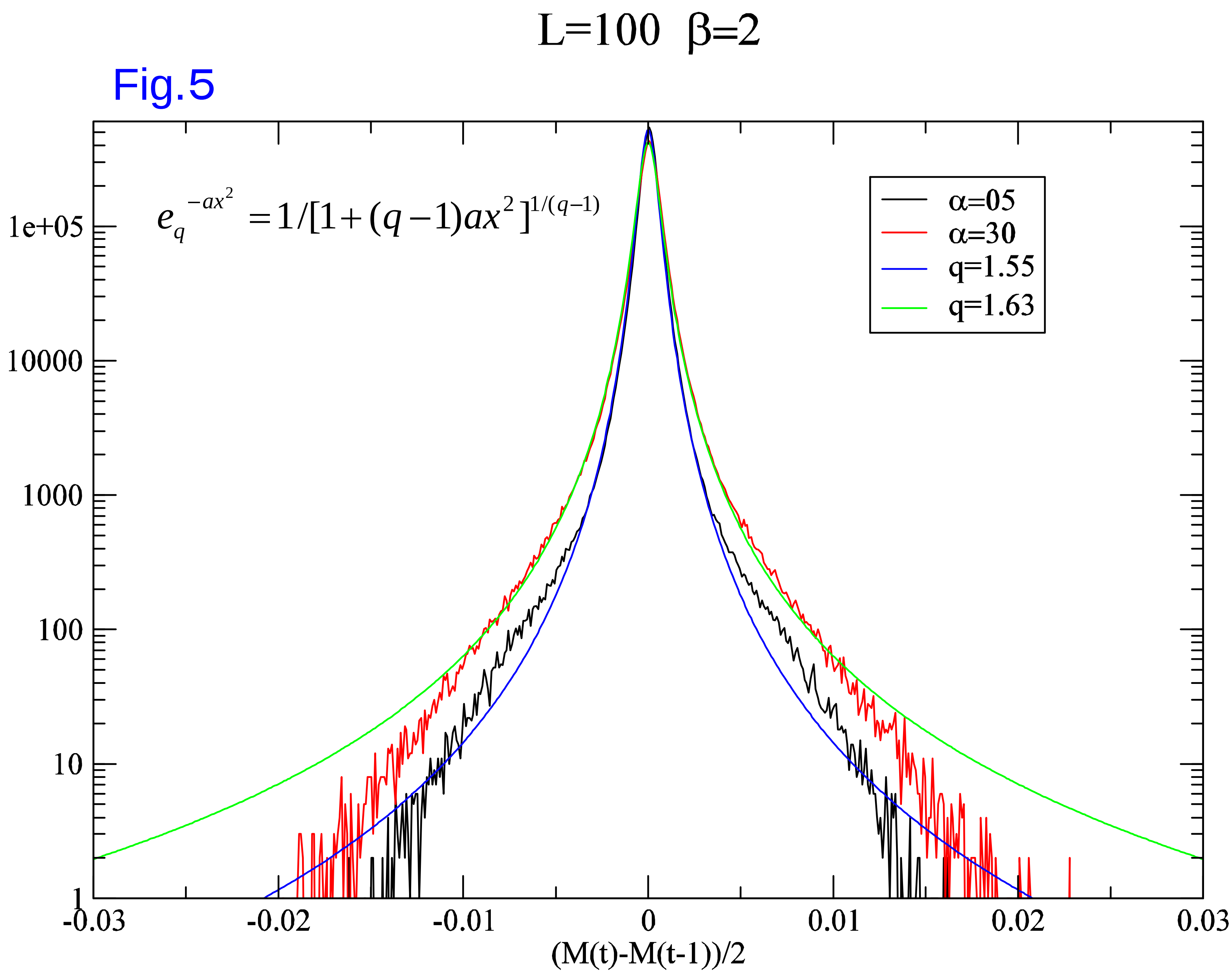


Fig.4
L=141
L=100
L=71
1e+06
1e+05
10000
1000
100
10
1
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
(M(t)-M(t-1))/2


L=100 β=2
Fig.5
$e_q^{-ax^2} = 1/[1+(q-1)ax^2]^{1/(q-1)}$
α=05
α=30
q=1.55
q=1.63
1e+05
10000
1000
100
10
1
-0.03
-0.02
-0.01
0
0.01
0.02
0.03
(M(t)-M(t-1))/2

Autocorrelation function

$$C(T) = \frac{<r(T+t)r(t)> - <r(T+t)><r(t)>}{\sigma^2}$$

リターンの絶対値の相関関数:　Fig.6とFig.7

相関はαが大きくなると小さくなる

相関は格子サイズが大きくなると大きくなる

もし、相関関数が次のような関数であれば

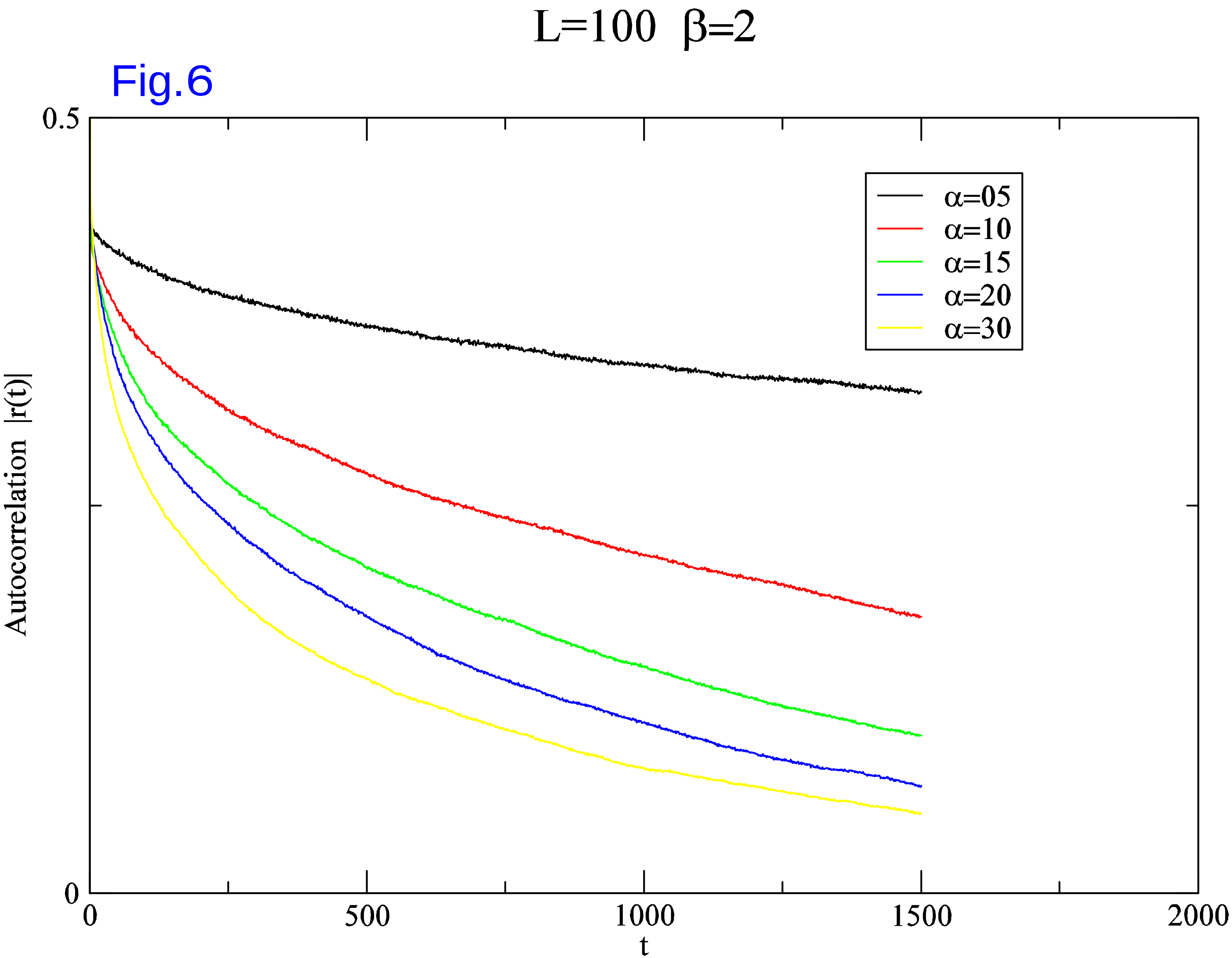
$$C(t) = \exp(-\frac{t}{\tau_0})$$

積分すると定数になる。 $\int_0^\infty C(t)dt = \tau_0$

Integrated autocorrelation function: Fig.8とFig.9

T=1500までいってもまだ増加ー→指数関数的な減少は
この時間までいっても見られない

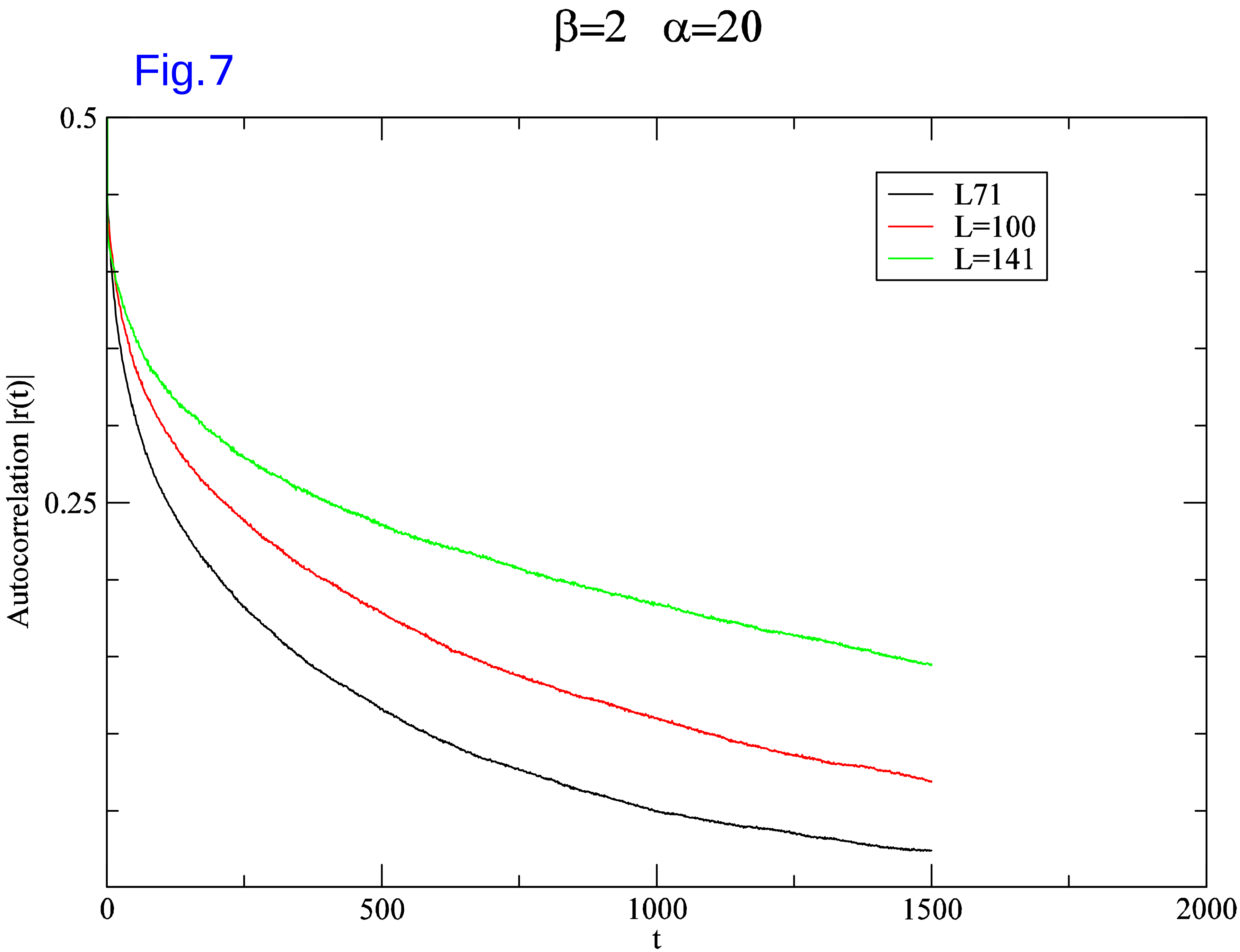
リターン自身には負の短期相関が見られる



L=100 β=2
0.5
0
Autocorrelation |r(t)|
0
500
1000
1500
2000
t
α=05
α=10
α=15
α=20
α=30

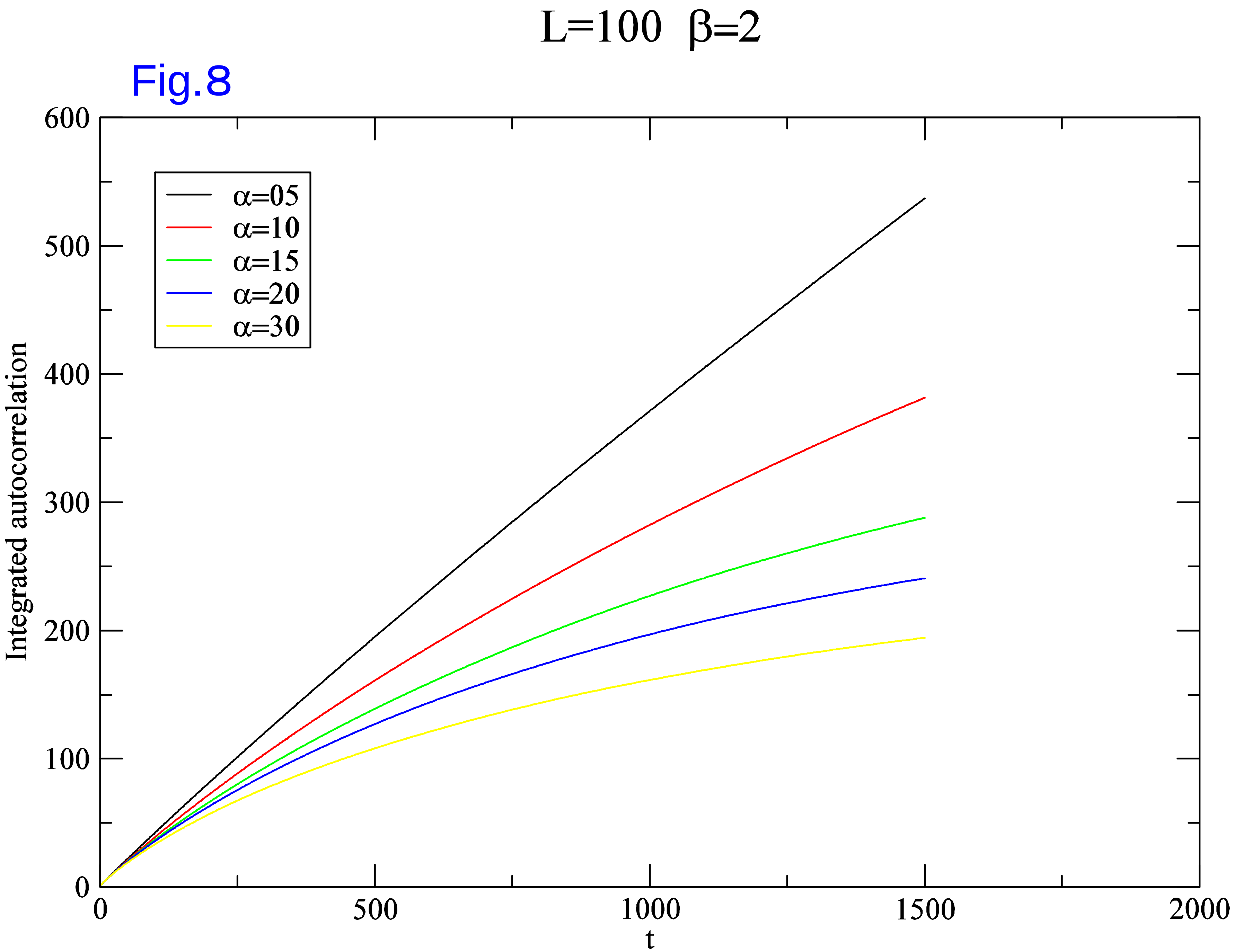
Fig.6

Fig.7



β=2   α=20
0.5
0.25
Autocorrelation |r(t)|
L71
L=100
L=141
0
500
1000
1500
2000
t

Fig.8



L=100 β=2
α=05
α=10
α=15
α=20
α=30
Integrated autocorrelation
t
0
100
200
300
400
500
600
500
1000
1500
2000

Fig.9

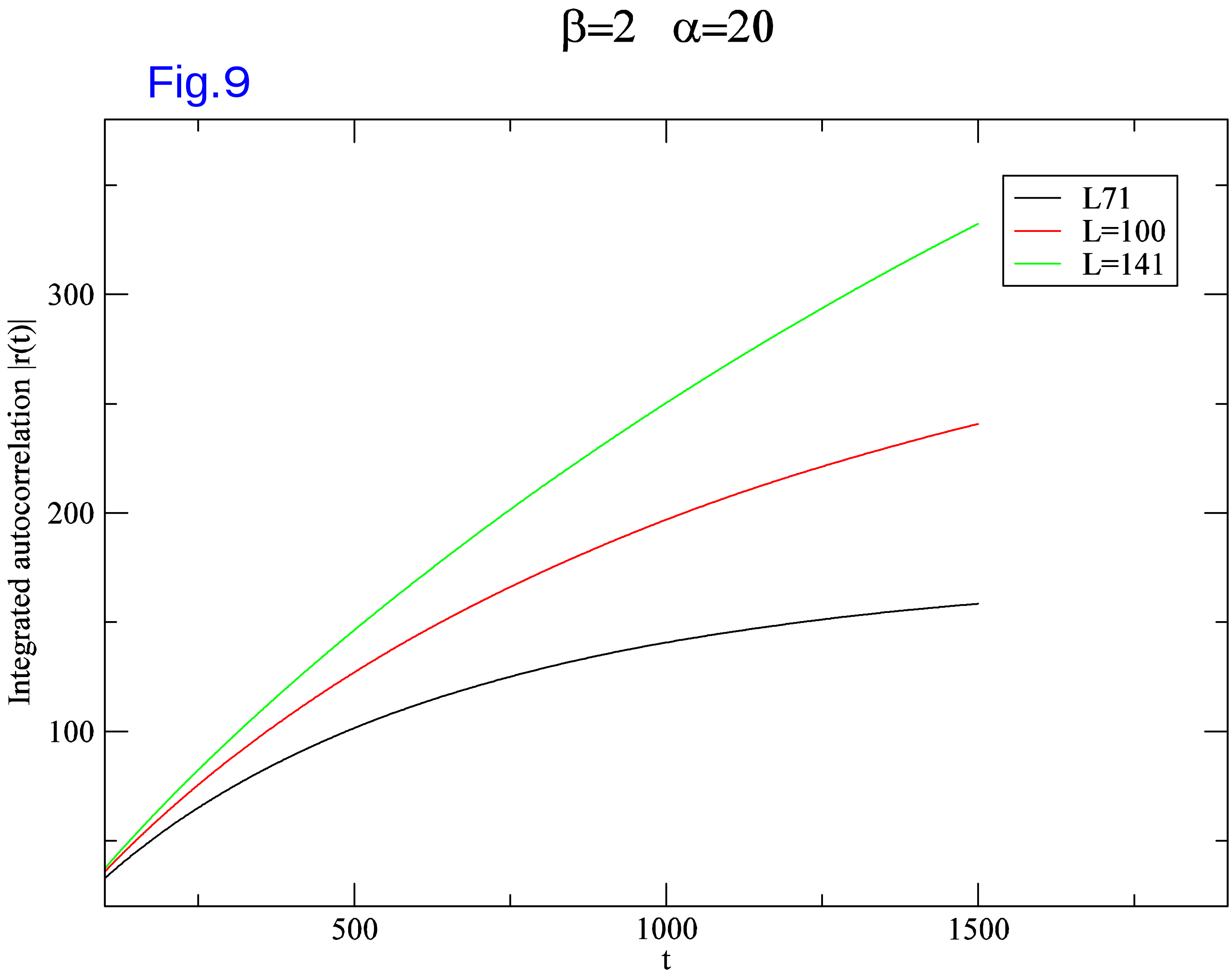
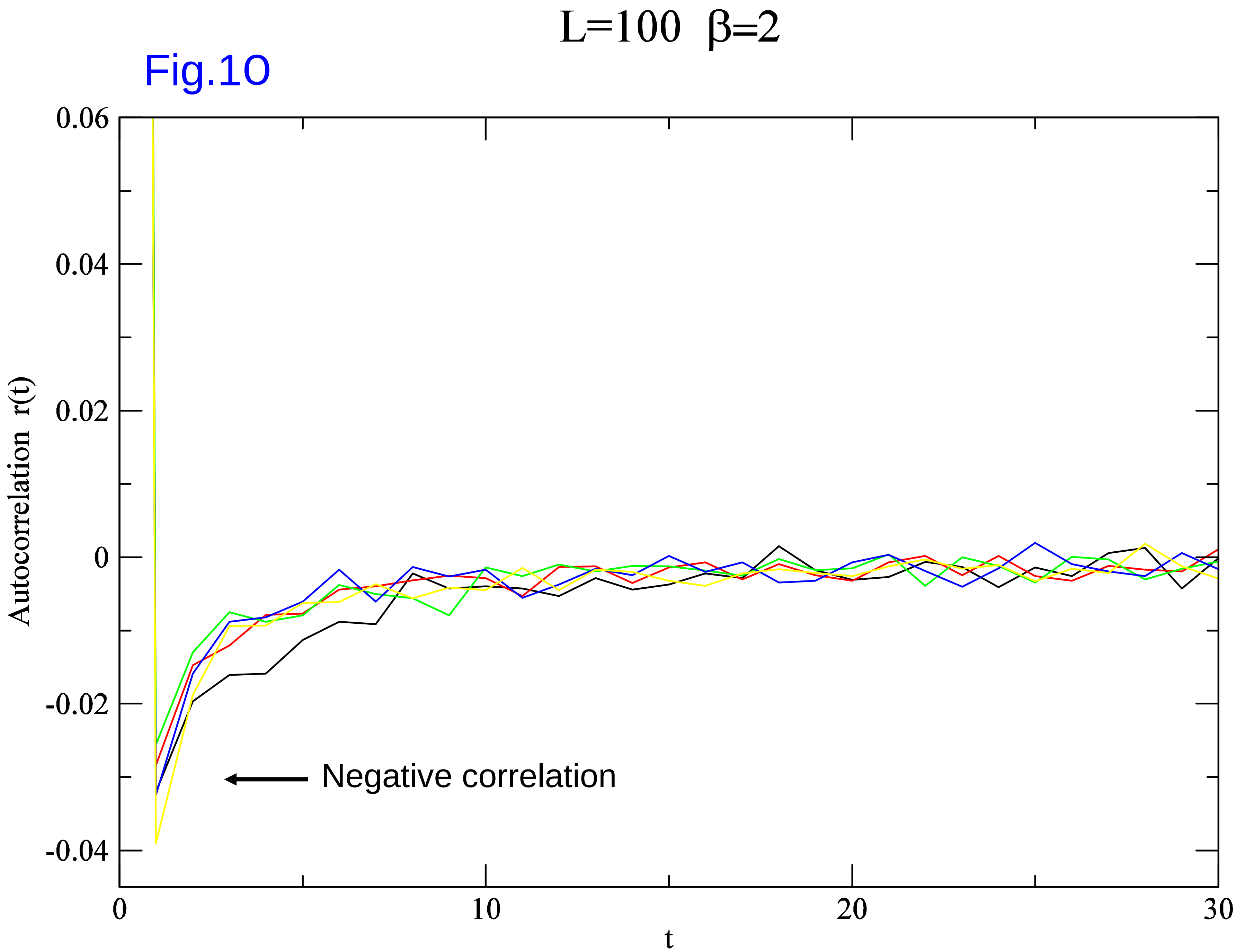

β=2 α=20
L71
L=100
L=141
300
200
100
500
1000
1500
t
Integrated autocorrelation |r(t)|

Fig.10



L=100 β=2
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
Autocorrelation r(t)
0
10
20
30
t
Negative correlation

4．Summary

- Bornholdtのスピンモデル（LocalとGlobalな相互作用を持つ）を利用してシミュレーションを行った。
- リターンの分布にFat　tailが現れる(non-Gaussian)。q-Gaussianによるフィッティングを行った。リターンの絶対値の長期相関、リターン自身には負の短期相関が見られる。
- 今後:相互作用の形を変化させたらどうなるか。LocalとGlobalな相互作用を持つほかのモデルでも同様な結果が得られるか？・・・・